Chapitre 4 – Calcul différentiel

*Dans tout le chapitre, sont des -evn de dim non nulles (avec ), désigne un ouvert de et un intervalle ouvert de .*

1. **Dérivation d’une fonction d’une variable réelle à valeurs vectorielles**

Définition : Soit un ouvert non vide de , . On dit que est **dérivable** en si le taux d’accroissement

admet une limite finie lorsque (). Sa limite est alors appelée **vecteur dérivé** de en a et noté .

Définition : Une fonction est dite dérivable si elle l’est en tout point de l’ouvert non vide . On peut alors introduire l’application appelée fonction dérivée de .

Théorème : Soient une base de et de fonction coordonnées dans la base . On a équivalence entre :

1. est dérivable sur
2. Les fonctions sont dérivables sur

De plus, si tel est le cas, on a

Proposition :

Soient deux fonctions dérivables sur . Pour tout la fonction est aussi dérivable sur et

1. **Différentielle d’une fonction**
2. **Développement limité à l’ordre 1**

Définition :

Soient et . On dit que admet un développement limité à l’ordre 1 en s’il existe une application linéaire et une fonction définie au voisinage de telle que

On notera alors lorsque .

Exemple :

* Pour , prenons sur .

admet un en ssi tq

Proposition : Soient et . Si admet un développement limité à l’ordre 1 en , il y a unicité de l’application linéaire décrivant le développement limité.

1. **Différentiabilité en un point**

Définition : Soit . On dit que est **différentiable** en s’il existe une application linéaire telle que :

Remarque : Puisque nous sommes dans des evn de dim finie, toutes les normes sont équivalentes et la notion de limite est invariante par passage à une norme équivalente, donc on peut choisir les normes que l’on veut sur et . Ainsi on marquera donc pour toutes les normes dans la suite du cours.

Proposition : Soient et . On a équivalence entre :

1. est différentiable en a
2. admet un développement limité à l’ordre 1 en .

Proposition : Si est différentiable en , l’application linéaire est unique. On la note , appelée différentielle de en .

Exemple :

1. Soit une fonction constante (telle que )

Soit

Donc avec et

Comme ceci montre que admet un en donc est différentiable en et

1. Soit linéaire. Soit

Théorème : Soit . Si est différentiable en , alors est continue en .

Proposition : Soient un intervalle ouvert non vide de , et . On a équivalence entre :

1. est différentiable en ,
2. est dérivable en .

Dans ce cas, on a alors

Où .

1. **Fonctions différentiables**

Définition : Une fonction est dite **différentiable** (sur ) si elle est différentiable en tout point de de . L’application

est alors appelée différentielle de .

Théorème : Les fonctions différentiables sont continues.

Proposition : Si est constante, alors est différentiable et sa différentielle est l’application nulle : pour tout où .

Proposition : Si est linéaire, alors est différentiable et sa différentielle est constante :

Exemple :

Proposition : Soient un intervalle ouvert (non vide) de et . On a l’équivalence :

Proposition :

Si est une application bilinéaire, alors est différentiable, et on a :

1. **Opérations sur les fonctions différentiables**

Proposition : Soient Pour tous si et sont différentiables, alors l’est aussi et

Proposition : Soient une base de et de fonctions coordonnées dans la base . On a équivalence entre :

1. est différentiable
2. Les fonctions coordonnées de sont différentiables.

Dans ce cas, on a :

Proposition : Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies (non nulles). On note . Soit On peut écrire avec les fonctions composantes de . On a équivalence entre :

1. est différentiable
2. Pour tout est différentiable

Dans ce cas, pour tout

Théorème : (Différentiation de fonctions composées)

Soient un ouvert de tel que et . Si est différentiable en et différentiable en la fonction composée est différentiable en et

Par suite, si et sont différentiables (resp. sur et sur ), est aussi différentiable et

Proposition : Soient une fonction scalaire et Si et sont différentiables en , il en est de même de la fonction et on a

ie

1. **Dérivées partielles**
2. **Dérivation selon un vecteur**

Soient et Puisque est un ouvert de , il existe tel que Pour fixé, la fonction

est définie au voisinage de 0. Elle étudie les valeurs prises par sur la droite affine (lorsque )

Définition :

Soient On dit que est dérivable selon le vecteur en si la fonction d’une variable réelle est dérivable en

On appelle alors « dérivée selon le vecteur de en  » la valeur de cette dérivée, notée

Théorème : Soient et Si est différentiable en , alors est dérivable en selon tout vecteur et on a

1. **Dérivées partielles**

Choisissons arbitrairement une base de Soit

Définition :

Soient et . On dit que admet une -ième dérivée partielle (dans la base ) en si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur en . On note alors :

Définition :

Sous réserve d’existence, l’application est appelée -ième dérivée partielle de dans la base