Chapitre 4 – Calcul différentiel

*Dans tout le chapitre, sont des -evn de dim non nulles (avec ), désigne un ouvert de et un intervalle ouvert de .*

1. **Dérivation d’une fonction d’une variable réelle à valeurs vectorielles**

Définition : Soit un ouvert non vide de , . On dit que est **dérivable** en si le taux d’accroissement

admet une limite finie lorsque (). Sa limite est alors appelée **vecteur dérivé** de en a et noté .

Définition : Une fonction est dite dérivable si elle l’est en tout point de l’ouvert non vide . On peut alors introduire l’application appelée fonction dérivée de .

Théorème : Soient une base de et de fonction coordonnées dans la base . On a équivalence entre :

1. est dérivable sur
2. Les fonctions sont dérivables sur

De plus, si tel est le cas, on a

Proposition :

Soient deux fonctions dérivables sur . Pour tout la fonction est aussi dérivable sur et

1. **Différentielle d’une fonction**
2. **Développement limité à l’ordre 1**

Définition :

Soient et . On dit que admet un développement limité à l’ordre 1 en s’il existe une application linéaire et une fonction définie au voisinage de telle que

On notera alors lorsque .

Exemple :

* Pour , prenons sur .

admet un en ssi tq

Proposition : Soient et . Si admet un développement limité à l’ordre 1 en , il y a unicité de l’application linéaire décrivant le développement limité.

1. **Différentiabilité en un point**

Définition : Soit . On dit que est **différentiable** en s’il existe une application linéaire telle que :

Remarque : Puisque nous sommes dans des evn de dim finie, toutes les normes sont équivalentes et la notion de limite est invariante par passage à une norme équivalente, donc on peut choisir les normes que l’on veut sur et . Ainsi on marquera donc pour toutes les normes dans la suite du cours.

Proposition : Soient et . On a équivalence entre :

1. est différentiable en a
2. admet un développement limité à l’ordre 1 en .

Proposition : Si est différentiable en , l’application linéaire est unique. On la note , appelée différentielle de en .

Exemple :

1. Soit une fonction constante (telle que )

Soit

Donc avec et

Comme ceci montre que admet un en donc est différentiable en et

1. Soit linéaire. Soit

Théorème : Soit . Si est différentiable en , alors est continue en .

Proposition : Soient un intervalle ouvert non vide de , et . On a équivalence entre :

1. est différentiable en ,
2. est dérivable en .

Dans ce cas, on a alors

Où .

1. **Fonctions différentiables**

Définition : Une fonction est dite **différentiable** (sur ) si elle est différentiable en tout point de de . L’application

est alors appelée différentielle de .

Théorème : Les fonctions différentiables sont continues.

Proposition : Si est constante, alors est différentiable et sa différentielle est l’application nulle : pour tout où .

Proposition : Si est linéaire, alors est différentiable et sa différentielle est constante :

Exemple :

Proposition : Soient un intervalle ouvert (non vide) de et . On a l’équivalence :

Proposition :

Si est une application bilinéaire, alors est différentiable, et on a :

1. **Opérations sur les fonctions différentiables**

Proposition : Soient Pour tous si et sont différentiables, alors l’est aussi et

Proposition : Soient une base de et de fonctions coordonnées dans la base . On a équivalence entre :

1. est différentiable
2. Les fonctions coordonnées de sont différentiables.

Dans ce cas, on a :

Proposition : Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies (non nulles). On note . Soit On peut écrire avec les fonctions composantes de . On a équivalence entre :

1. est différentiable
2. Pour tout est différentiable

Dans ce cas, pour tout

Théorème : (Différentiation de fonctions composées)

Soient un ouvert de tel que et . Si est différentiable en et différentiable en la fonction composée est différentiable en et

Par suite, si et sont différentiables (resp. sur et sur ), est aussi différentiable et

Proposition : Soient une fonction scalaire et Si et sont différentiables en , il en est de même de la fonction et on a

ie

Exemple : on considère définie par

On a vu que admet des dérivées directionnelles en selon et :

Supposons différentiable en . Alors ,

mais alors comme

mais d’une part,

et d’autre part, par linéarité de ,

C’est absurde, donc n’est pas différentiable en .

1. **Dérivées partielles**
2. **Dérivation selon un vecteur**

Soient et Puisque est un ouvert de , il existe tel que Pour fixé, la fonction

est définie au voisinage de 0. Elle étudie les valeurs prises par sur la droite affine (lorsque )

Définition :

Soient On dit que est dérivable selon le vecteur en si la fonction d’une variable réelle est dérivable en

On appelle alors « dérivée selon le vecteur de en  » la valeur de cette dérivée, notée

Théorème : Soient et Si est différentiable en , alors est dérivable en selon tout vecteur et on a

1. **Dérivées partielles**

Choisissons arbitrairement une base de Soit

Définition :

Soient et . On dit que admet une -ième dérivée partielle (dans la base ) en si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur en . On note alors :

Définition :

Sous réserve d’existence, l’application est appelée -ième dérivée partielle de dans la base

Théorème 6 : Si est différentiable alors les dérivées partielles de dans la base

existent et pour tout , on a :

De plus, pour tout (avec ),

Démonstration : ⍟

Soit . Comme est différentiable en , par le théorème précédent, admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, on a donc en particulier selon le vecteur pour . Ainsi existe et par définition, par le théorème précédent.

De plus, soit tel que .

Par le théorème précédent, on a et

Corollaire : Si est différentiable en , le développement limité à l’ordre 1 de en s’écrit :

1. **Dérivées partielles d’une fonction de variables réelles**

Soit donnée par

On étudie les dérivées partielles de dans la base canonique de

Pour , on peut définir la -ième application partielle de au point par :

Comme est un ouvert de , la fonction est au moins définie sur intervalle de la forme

avec

Proposition : Soit . On a équivalence entre :

1. admet une -ième dérivée partielle en (dans la base canonique)
2. La -ième application partielle de au point , notée est dérivable en

Dans ce cas, on a :

Remarque : Si l’on convient de noter les éléments du -uplet , il est usuel de noter :

1. **Dérivées partielles d’une fonction d’une variable**

Soit et une base de . Pour , convenons de noter les coordonnées de dans la base . On a alors

Proposition : Avec les notations précédentes, pour et , on a équivalence entre :

1. admet une -ième dérivée partielle dans la base en
2. admet une -ième dérivée partielle en (dans la de )

Dans ce cas, on a

(où )

Proposition : Soit . On a équivalence entre :

1. admet une -ième dérivée partielle en dans la base de ,
2. Les fonctions coordonnées de dans une base de admettent une -ième dérivée partielle en dans la base

Dans ce cas, on a

Où l’on a noté et les fonctions coordonnées de et dans une base donnée de

1. **Matrice Jacobienne**

Définition : Soient une base de , et une base de . Soit

différentiable en . On appelle ***matrice Jacobienne*** de en la matrice de l’application linéaire relatives aux bases et  :

Théorème : Avec les mêmes notions, notons les fonctions coordonnées de dans la base , alors

Remarque : Si l’on convient de noter les coordonnées de dans , on peut écrire :

Remarque : la matrice Jacobienne caractérise entièrement la différentielle de en .

1. **Dérivées partielles d’une fonction composée**

Proposition : (Version matricielle du théorème de différentiation d’une composée)

Soient , , où est un ouvert de vérifiant et . Si est différentiable en et est différentiable en , alors est différentiable en et :

Proposition : (Formule de dérivation en chaîne)

Soient où est un ouvert de tel que et . Si est différentiable en et différentiable en , alors les dérivées partielles de en dans une base de existent et sont données par

Où l’on a noté les fonctions coordonnées de dans une base de .

Remarque : Si l’on convient de noter les coordonnées d’un vecteur générique dans la base et celles d’un vecteur générique dans la base , la formule précédente se réécrit sous la forme :

1. **Fonctions de classe**

Théorème : Soit . On a équivalence entre :

1. est différentiable et est continue
2. les dérivées partielles de dans une base de existent et sont continues

Définition : On dit qu’une fonction est de classe (sur ) si ses dérivées partielles dans une base de existent et sont continues (sur ).

Proposition : Les fonctions de classe sont différentiables donc continues.

Exemple :

Soit linéaire. On a vu que est différentiable sur , et

Alors est constante donc continue sur , donc est sur .

Proposition : Soit . On note les fonctions coordonnées de dans une base de de . On a équivalence entre :

1. est de classe sur
2. la fonction est de classe sur

Proposition : Soient de classe . Pour tous la fonction est aussi de classe sur

Proposition : Soient et une fonction scalaire. Si et sont de classe sur , il en est de même de la fonction .